Loi normale
Loi normale réduite

Cours 6

Probabilité
Loi binomiale
La normale
Loi normale centrée réduite

Probabilité

Prévoir l’inconnu à partir du connu ?

- L’inférence implique un passage de l’échantillon à la population régi par un ensemble de postulats et de règles étudiées dans un branche des mathématiques appelée calcul des probabilités

- Il s’agit de passer du connu à l’inconnu en se fondant sur un raisonnement logique

- La théorie des probabilités s’intéresse a décrire des expériences aléatoire
  - ✓ Exemple : le jet de dés

Probabilité

Prévoir l'inconnu à partir du connu ?

- Une expérience aléatoire se caractérise par un ensemble Ω appelé espace d'épreuve
- Chaque élément de cet ensemble est appelé un résultat ou une issue de cette expérience
- Pour un jet de un seul dés l'espace d'épreuve Ω est: 1, 2, 3, 4 , 5 , 6
- La probabilité d'avoir un 1, par exemple, avec un seul lancé est de 1 chance sur 6

$$P(\text{eve.}) = \frac{\text{(nb de fois où cet événement peut apparaître)}}{\text{(nb total d'événements peut possibles)}}$$

Probabilité

Prévoir l'inconnu à partir du connu ?

- Pour le jet d'une paire de dés, l'espace d'épreuve Ω est :

1er dé

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
2	(1,2)	(2,2)				
3	(1,3)		(3,3)			
4	(1,4)			(4,4)		
5	(1,5)				(5,5)	
6	(1,6)					(6,6)

2eme dé

Probabilité

Prévoir l'inconnu à partir du connu ?

- Quelle est la probabilité d'obtenir deux as (ou la somme 2) en lançant une paire de dés ?:

1er dé

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
2	(1,2)	(2,2)				
3	(1,3)		(3,3)			
4	(1,4)			(4,4)		
5	(1,5)				(5,5)	
6	(1,6)					(6,6)

2eme dé

Probabilité

Prévoir l'inconnu à partir du connu ?

- Quelle est la probabilité d'obtenir deux as (ou la somme 2) en lançant une paire de dés ?

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
2	(1,2)	(2,2)				
3	(1,3)		(3,3)			
4	(1,4)			(4,4)		
5	(1,5)				(5,5)	
6	(1,6)					(6,6)

- Réponse : P(eve. 2 AS) = 1/36, 1 chance sur 36

Épreuve de Bernoulli

- Comme pour le jeu du pile ou face, la distribution la plus simple est celle qui décrit des événements n'ayant que deux possibilités
  - ✓ Un individu est choisi au hasard et son sexe est noté. Le résultat peut être Homme ou Femme.
  - ✓ Dans l'industrie, une machine peut fonctionner ou être en panne, etc.
- La loi de Bernoulli décrit le comportement d'une expérience aléatoire qui possède deux résultats possibles
  - ✓ En général, l'un des deux résultats est appelé de façon arbitraire un « succès » et l'autre un « échec »
  - ✓ Une telle expérience s'appelle une épreuve de Bernoulli

Épreuve de Bernoulli

- Pour simplifier, on note p la probabilité d'un succès, Pr(S).
  Il s'ensuit que 1 - p est la probabilité d'un échec, souvent noté q, Pr(E)
  - ✓ Dans le cas d'une pièce de monnaie non truquée, p= ½ .
  - ✓ Dans le cas de la machinerie, l'entrepreneur souhaite que P soit le plus élevé possible.

- Dans un essai de Bernoulli, chaque essai est indépendant des essais précédents.
  - ✓ Il découle alors que la probabilité est simplement multiplicative.

- Par exemple
  - ✓ Pr{S, S} (la probabilité de deux succès) est : Pr{S, S} = $p \times p = p^2$
  - ✓ Pr{S, S, E, S, E, E} $= p \times p \times (1-q) \times p \times (1-q) \times (1-q) = p^3(1-q)^3$
  - ✓ L'ordre dans lequel les résultats sont obtenus n'est pas important puisqu'ils sont indépendants.

Exemple

Les jeunes enfants disent souvent de petits mensonges sans mauvaises intentions. Dès l'âge de 2 ans et jusqu'à environ 5 ans, un enfant peut mentir pour diverses raisons. Disons qu'un enfant ment 1 fois sur 5 (attention il s'agit d'un exemple illustratif et non d'une vraie donnée), on veut savoir sur 5 questions independantes quelle est la probabilité qu'un enfant:

- ne ment pas, c.a.d Pr{V, V, V, V, V}
  = 4/5 x 4/5 x 4/5 x 4/5 x 4/5 = 1024/3125 = 0.32768 ~ 32,77 %

- ment 5 fois, c.a.d : Pr{M, M, M, M, M} =
  1/5 x 1/5 x 1/5 x 1/5 x 1/5 = 1/3125 = 0.00032 = 0,032 %

- ment 1 fois, c.a.d Pr{M, V, V, V, V} ou Pr{V, M, V, V, V} ou Pr{V, V, M, V, V} ou Pr{V, V, V, M, V} ou Pr{V, V, V, V, M}
  = (1/5 x 4/5 x 4/5 x 4/5 x 4/5)x 5 = 0.08192x 5.=0.4096 = 40,96%

Loi binomiale

- Lorsqu'on répète une épreuve de Bernoulli on obtient un schéma de Bernoulli.

- Une manière visuelle de représenter cette suite d'expériences est d'utiliser un arbre de probabilité : à chaque génération de l'arbre, deux branches partent de chaque nœud, une pour le succès et une pour l'échec.

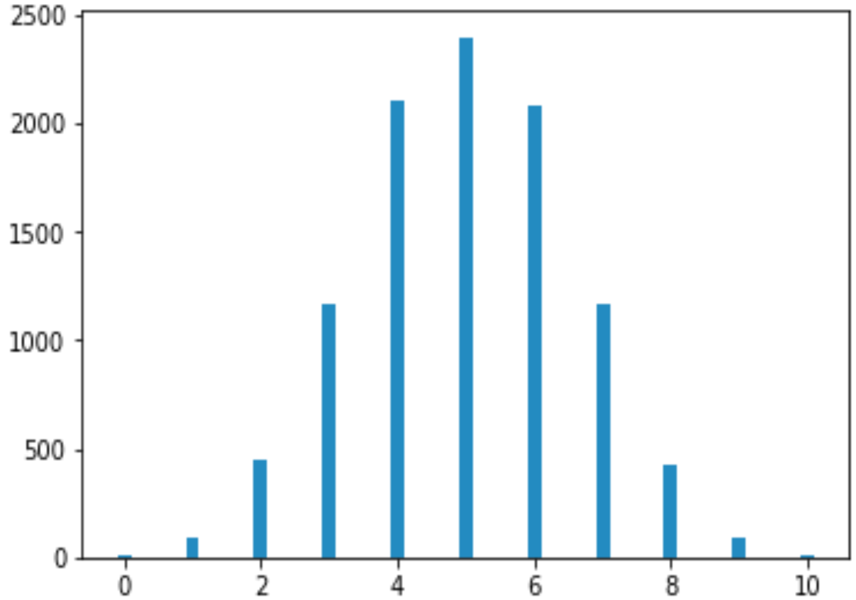
- Le nombre de succès au cours d'une série de n épreuves répondant à un schéma de Bernoulli est une variable aléatoire discrète, appelée loi binomiale.

- En statistique (et en théorie des probabilités) la loi binomiale modélise le nombre de succès obtenus lors de la répétition indépendante de plusieurs expériences aléatoires identiques.

Exemple

Si on joue à pile ou face, disons 10 fois, quelle est la probabilité d'obtenir : 1 face , 2 faces, 3 faces … ?
Disons que l'on reproduit 10 000 fois cette experience des 10 lancés par une simulation Monte-Carlo dont voici le résultat:

Nb piles	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_i	8	96	450	1167	2101	2398	2083	1170	428	89	10



De Bernoulli à binomiale

- La loi de Bernoulli décrit le comportement d'une expérience aléatoire qui possède deux résultats possibles. En général, l'un des deux résultats est appelé de façon arbitraire un « succès » et l'autre un « échec ».
  - ✓ On associe la probabilité p pour le succès et donc (1 – p) pour l'échec
  - ✓ Exemple : le lancer d'un dé
    Soit le succès l'événement « la face du dé est le chiffre 3 » , de probabilité p (=1/6), et pour échec l'événement « la face du dé n'est pas le chiffre 3 », de probabilité 1-p (=5/6)
- Un schéma de Bernoulli d'ordre n : c'est une répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes
  - ✓ Exemple: on lance 10 fois de suite un dé. Il y a répétition de 10 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes

De Bernoulli à binomiale

- Soit une répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de probabilité p (schéma de Bernoulli) et soit X la variable aléatoire qui associe à cette répétition de n épreuves le nombre de succès.
  - ✓ La loi de probabilité de X est alors appelée loi binomiale de paramètres n et p et est notée B(n;p). La formule déterminant la probabilité que la valeur prenne la valeur *k* est P(X=k).

<u>Je ne donne volontairement pas la formule de la probabilité.</u>

  - ✓ Exemple I
    On lance 10 fois de suite un dé. La variable aléatoire X prend pour valeur le nombre d'occurrences du chiffre 3, c.à.d. le nombre de succès. X suit donc une loi binomiale de paramètres n=10 et de probabilité p=1/6 , B(10;1/6). La probabilité d'avoir 4 fois 3 (sur les n=10 lancés) est P(X=4).

De Bernoulli à binomiale

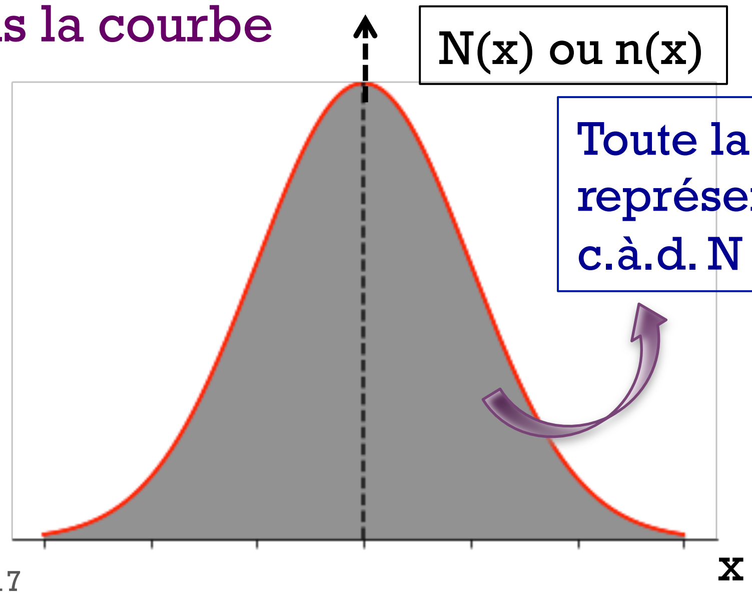
- Exemple II
  Dans une Université 0.5% des étudiants sont kleptomanes (ou kleptomanes).
  Le terme kleptomanie (qui s'écrit aussi "cleptomanie") désigne, chez la personne qui en est atteinte, la pulsion irrépressible de s'approprier des objets, ceci en l'absence d'un motif économique ou d'un besoin réel de cet objet.
- On prend un échantillons de 40 étudiants.
  On se pose la question de la probabilité d'avoir 2 étudiants cleptomanes. On sait que c'est une loi binomiale de paramètres n=40 et de probabilité p=0.0012% et donc on peut calculer P(X=2).

- L'emploi de la loi binomiale n'est pas toujours très commode.
  Si n est grand, c'est-à-dire au moins une trentaine d'observations, et si p n'est pas trop proche de 0 ou de 1, la loi binomiale converge vers une loi normale. C'est une application du théorème de limite centrée.

Loi normale

Fonction mathématique

- La courbe normale est la représentation graphique d'une fonction mathématique qui met en relation y et x
  - ✓ x : valeurs de la variable statistique étudiées (ou modalités)
  - ✓ y : l'effectifs associés (qui sera N(x) ou n(x))
  - ✓ N ou n : le total d'individu dans l'échantillon ou la population c'est toute l'aire sous la courbe

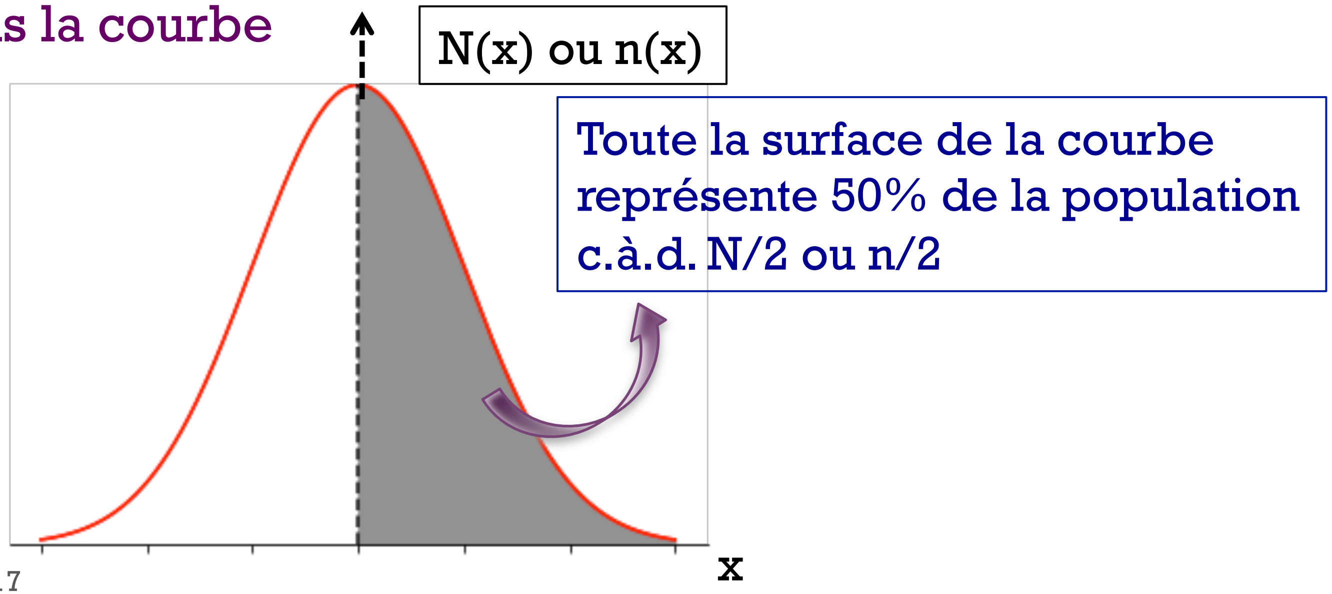


Toute la surface de la courbe représente 100% de la population c.à.d. N ou n

Loi normale

Fonction mathématique

- La courbe normale est la représentation graphique d'une fonction mathématique qui met en relation y et x
  - ✓ x : valeurs de la variable statistique étudiées (ou modalités)
  - ✓ y : l'effectifs associés (qui sera N(x) ou n(x))
  - ✓ N ou n : le total d'individu dans l'échantillon ou la population c'est toute l'aire sous la courbe

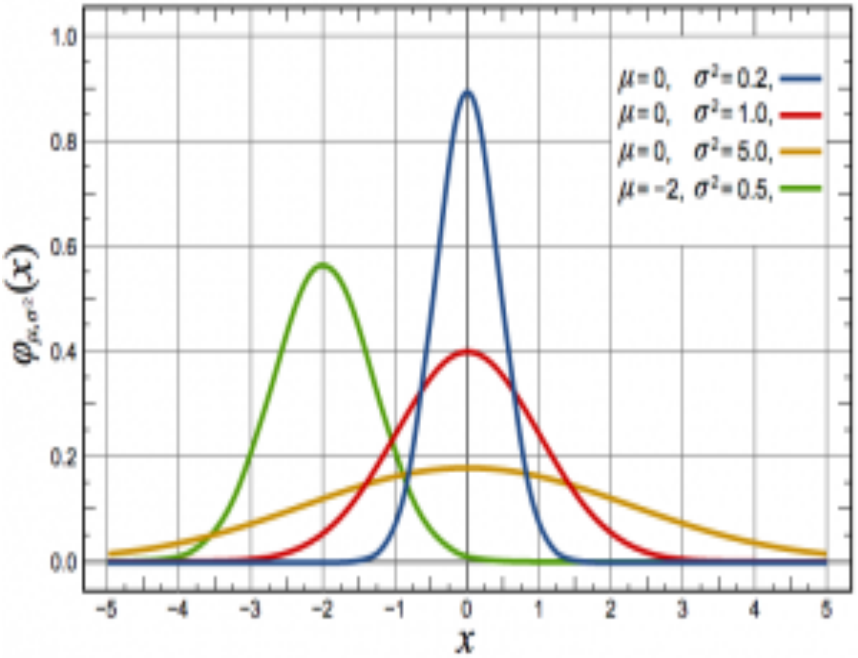


Loi normale

Fonction mathématique

- Lorsqu'un variable X suit une loi normale, elle est dite gaussienne ou normale et on note : n(m,s) ou N(μ , σ)

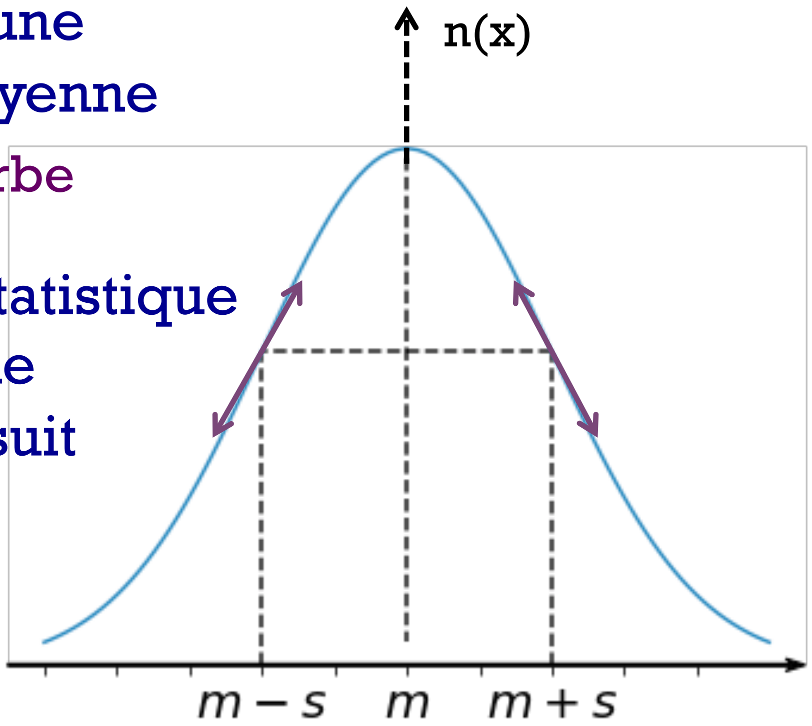
- La loi normale est parfaitement définie par deux paramètres
  - ✓ La moyenne
  - ✓ L'écart-type



Loi normale

Fonction mathématique

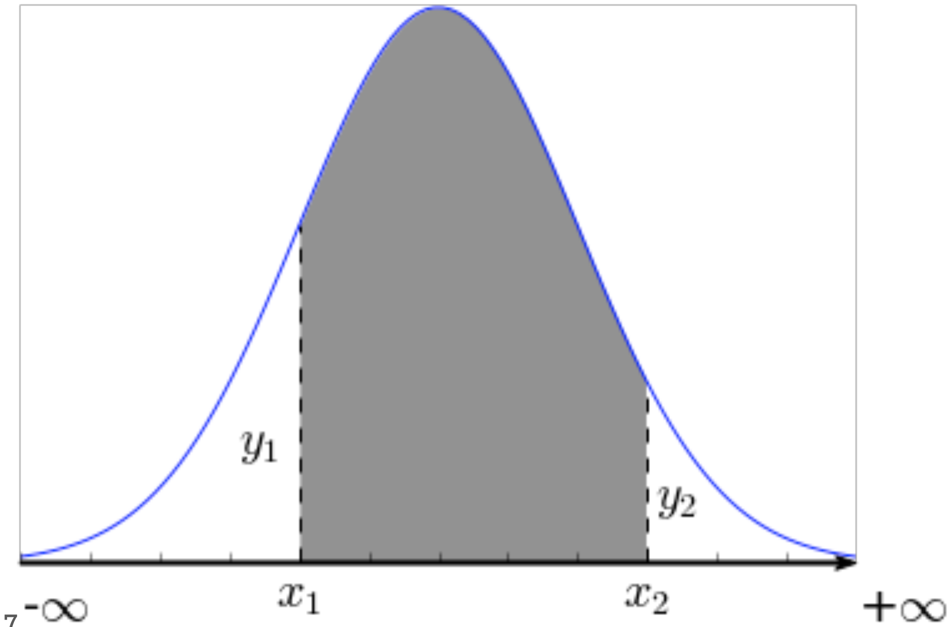
- Parfaitement symétrique autour de sa valeur moyenne
  - ✓ Valeur moyenne qui est aussi la médiane et le mode
- Un point d'inflexion situé situé à une distance d'un écart-type de la moyenne
  - ✓ Point d'inversion du sens de la courbe
- Rôle extrêmement important en statistique inférentielles, car la distribution de nombreuses variables aléatoires suit une telle loi



La notion de probabilité et la loi normale

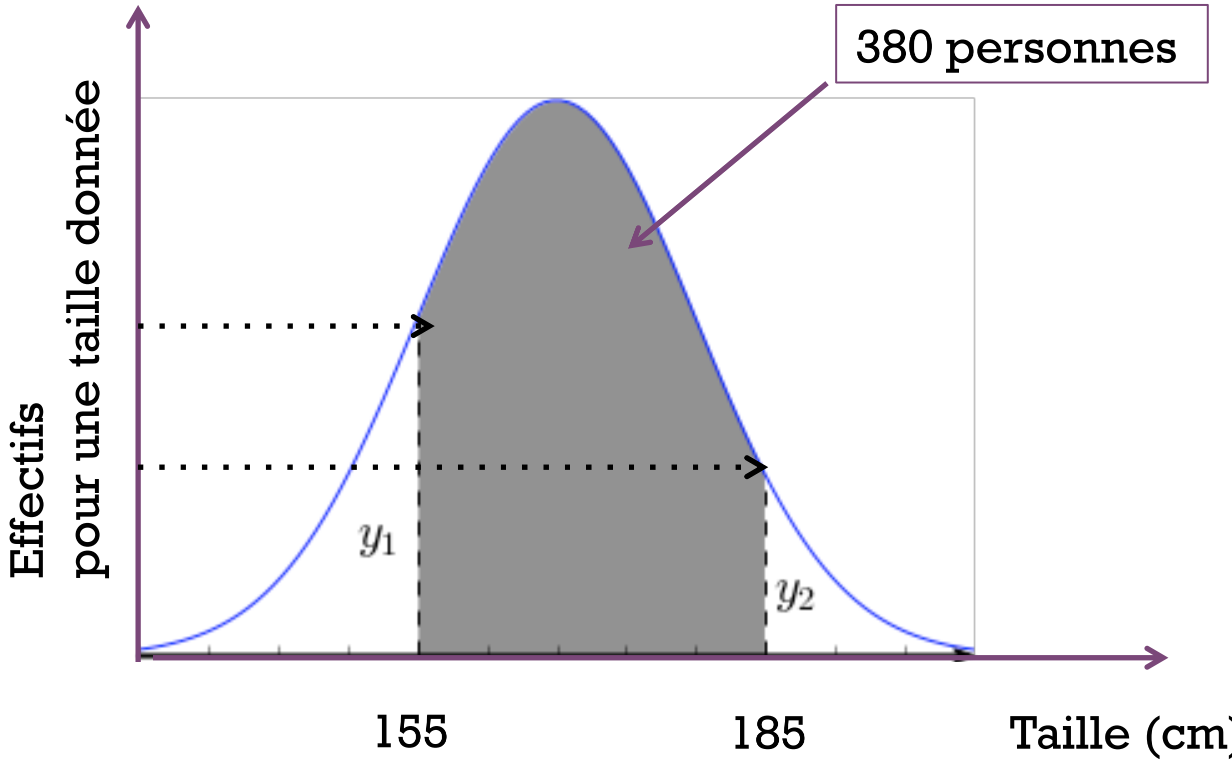
- La relation entre loi normale et probabilité repose sur la notion d'aire comprise sous la courbe.

- Un phénomène est d'autant plus probable que la portion d'aire qui lui correspond sous la courbe est plus importante



Exemple

◆ Taille de la population de l'UFR de Psychologie N=500



◆ La probabilité d'avoir un élève compris entre 155 cm et 185 cm est : 380/500. = 76%

La notion de probabilité et la loi normale

- On souhaite calculer la probabilité qu'une valeur x_i, tirée au hasard, soit comprise entre x_1 et x_2 : $p(x_1 \leq x_i \leq x_2)$.
- Le calcul de y_1 et y_2 délimite une aire hachurée sous la courbe
- L'aire totale sous la courbe est égale à 1
  - ✓ La probabilité peut être exprimée comme un « rapport des aires »

$$\boxed{p(x_1 \leq x_i \leq x_2) = \frac{\text{aire hachurée}}{\text{aire totale}}}$$

  - ✓ $p(x_1 \leq x_i \leq x_2)$ = proportion de l'aire hachurée

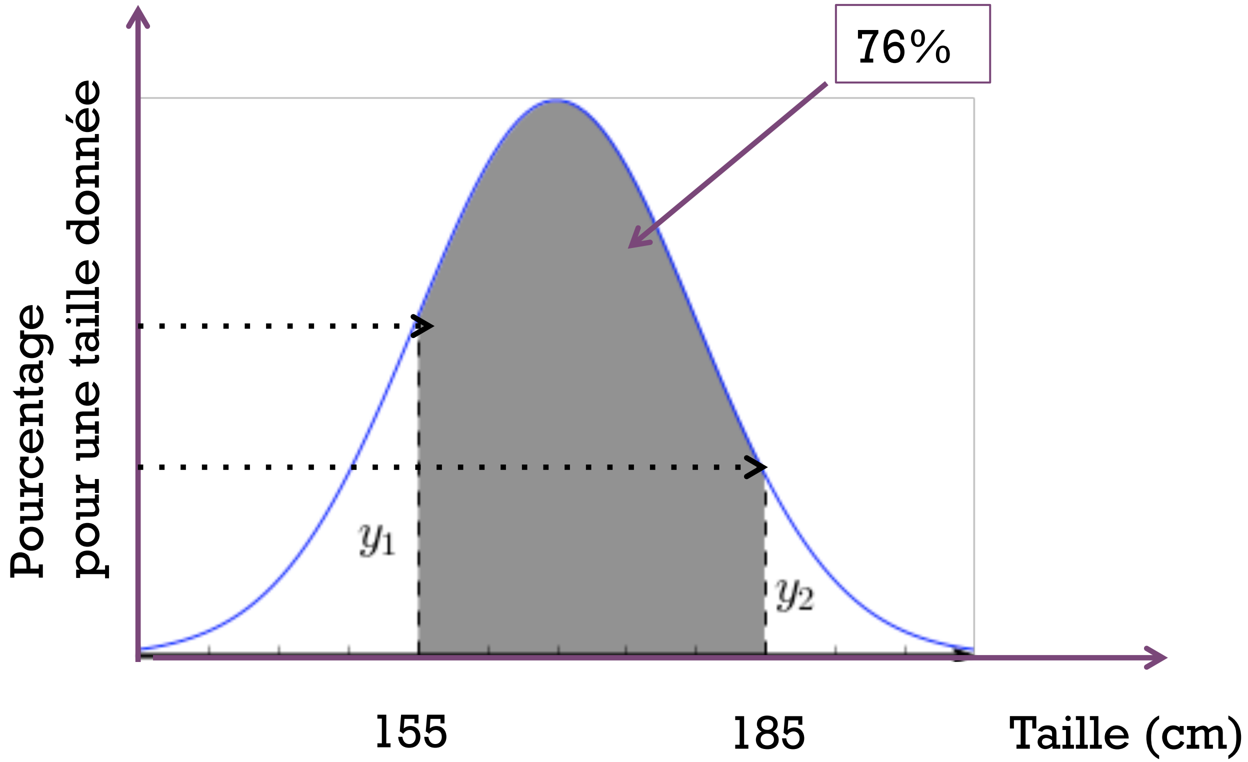
Fonction de densité

- Quand une variable X suit une loi normale, on représente généralement la distribution des proportions et non celle des effectifs.

- La fonction de densité donne la fréquence d'apparition d'une modalité de la variable x. La surface compris entre la courbe et l'axe des abscisses représente 100% des effectifs

Exemple

- Taille de la population de l'UFR de Psychologie



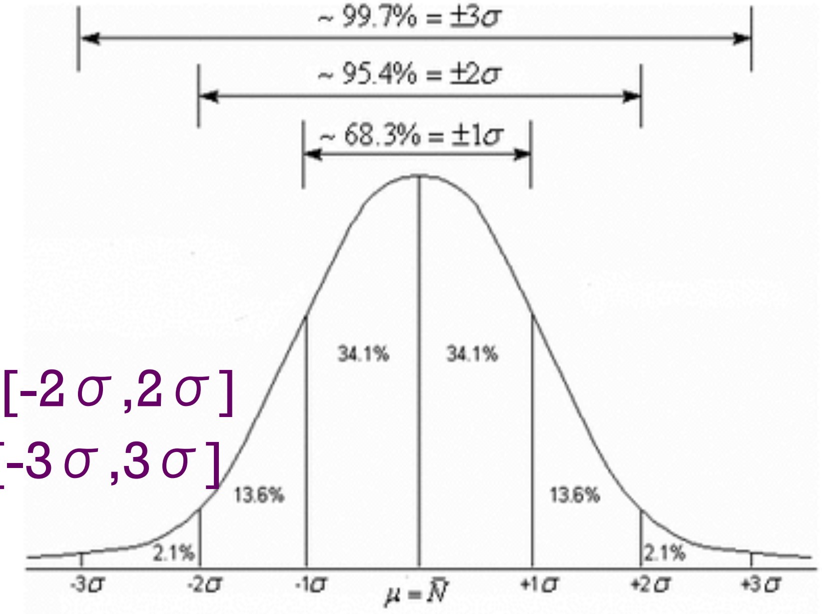
- Effectif total 100%

Fonction de densité

- On peut découper l'aire en plusieurs tronçons de largeur = 1 σ. Quelles que soient les valeurs de μ et σ (et donc l'allure de la courbe de Gauss), ces tronçons occupent des pourcentages de surfaces toujours identiques.

- Le calcul de ces pourcentages permet de calculer, et donc de prévoir, les probabilités d'occurrence des modalités comprises dans ces tronçons

- Ainsi on a
  - ✓ 68,3 % des valeurs de la distribution comprise dans [-1 σ ,1 σ]
  - ✓ 95,4 % des valeurs comprises dans [-2 σ ,2 σ]
  - ✓ 99,7 % des valeurs comprises dans [-3 σ ,3 σ]



Loi normale centrée réduite

- Dans la famille des lois normales, il en existe une qui sert de références pour toutes les autres : la loi normale centrée réduite
  - ✓ Elle est unique elle a pour moyenne 0 et pour écart-type 1
  - ✓ On la note z, qui suit la loi de distribution $N(0,1)$
- Comme $\mu = 0$, l'axe de symétrie de la courbe est l'axe des ordonnées
- Comme $\sigma = 1$, l'écart-type sert d'étalon à l'axe des abscisses
- On a l'habitude d'appeler « z » l'axe de la mesure au lieu de « x »

Transformation de N(μ , σ) en N(O,1)

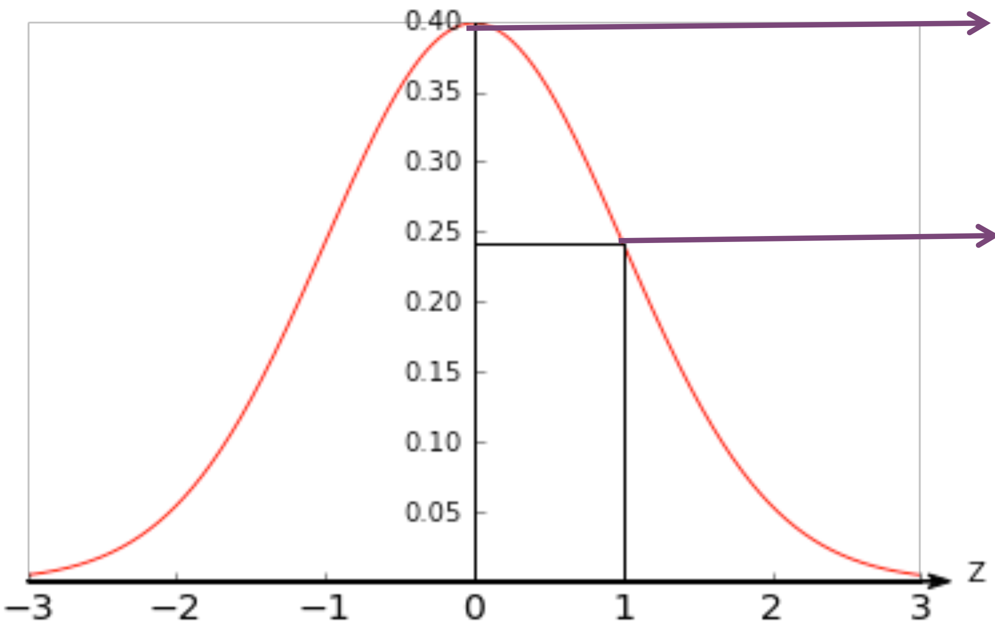
- Pour toute loi normale N(μ , σ), deux transformations peuvent être effectuées
  - ✓ Centrage, en posant y = x- μ : y a pour moyenne 0
  - ✓ Réduction, en posant z = y/ σ : z a pour écart type 1 et pour moyenne 0.

- Si une variable continue x suit une loi normale, on peut la transformer en une loi normale centrée réduite en posant une nouvelle variable z, appelée écart réduit, telle que :

$$\boxed{z = \frac{x-\mu}{\sigma}}$$ Pour une population

$$\boxed{z = \frac{x-m}{s}}$$ Pour un échantillon

Loi normale centrée réduite



- Pour $z = 0$, on a $y \sim 0.4$
  - ✓ Sommet de la courbe
- Pour $z = 1$, on a
  - ✓ Point d'inflexion

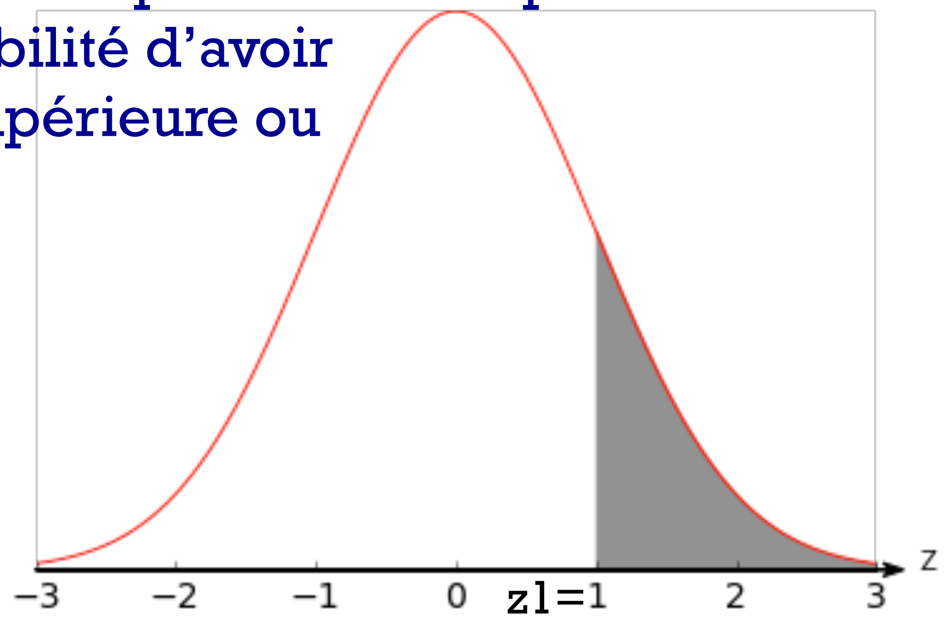
La loi normale possède plusieurs propriétés intéressantes…

Propriété

- L'aire totale sous la courbe est 1
  - ✓ Elle donne directement la probabilité

- Conséquence : on peut pour un z donné calculer la probabilité associée à z

- Il suffit de calculer la surface occupée avant ou après z1 et on obtient directement la probabilité d'avoir une valeur z de la variable supérieure ou inférieure à z1.



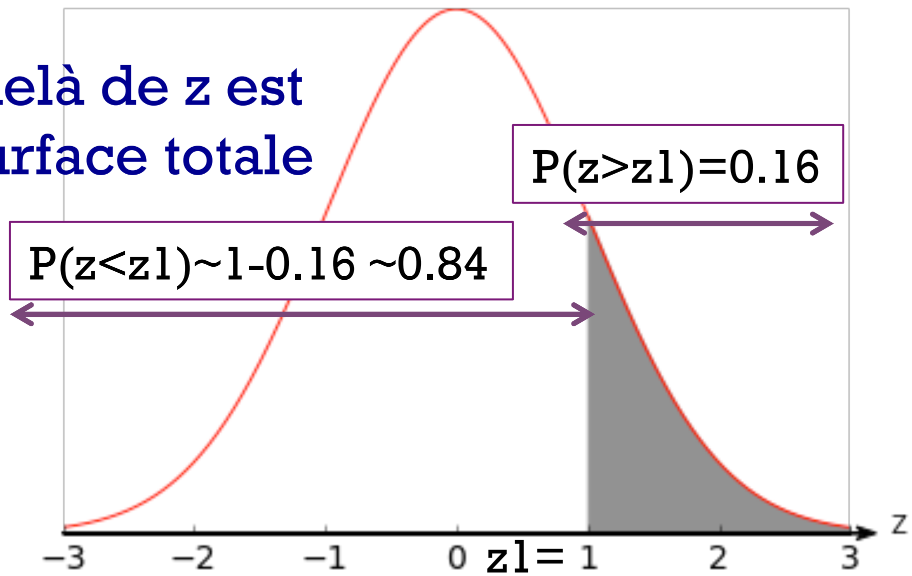
Propriété

- Comme l'aire totale est égale à 1, on peut écrire
  - ✓ $P(z \leq z1) + P(z \geq z1) = 1$ (100%)
  - ✓ $P(z \leq z1) = 1 - P(z \geq z1)$

- On consigne l'ensemble des probabilités dans une table dite « table des z » ou « table z »

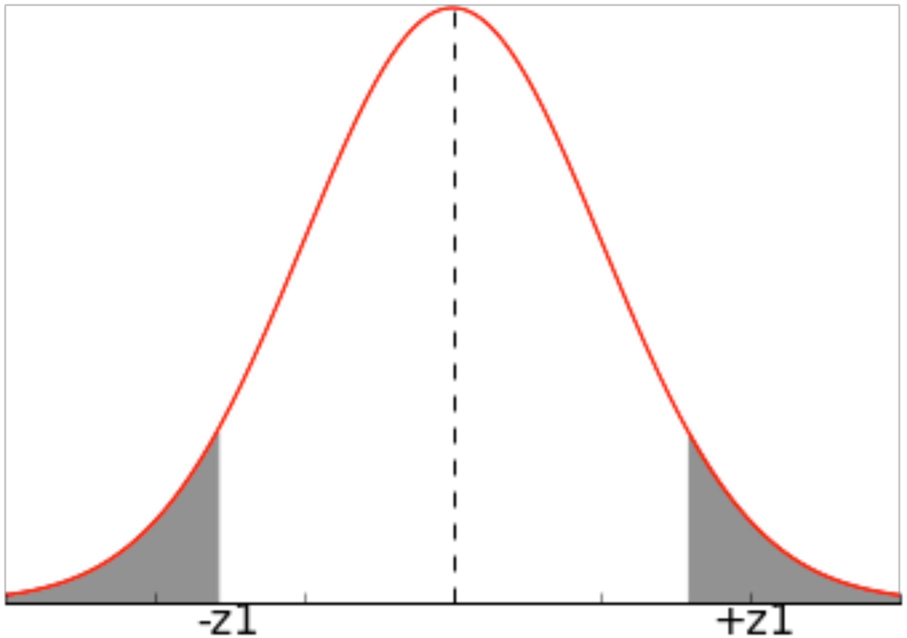
Exemple

Si z1 = 1, on sait que l'aire au-delà de z est de 0,1586, soit 15,86 % de la surface totale



Propriété

- Les probabilités associées à z1 et –z1 sont identiques
- Comme l'axe des ordonnées est l'axe de symétrie, les aires au-delà de z1 ou en deçà de –z1 sont identiques, et les probabilités associées égales
- $P(z \leq -z1) = P(z \geq z1)$

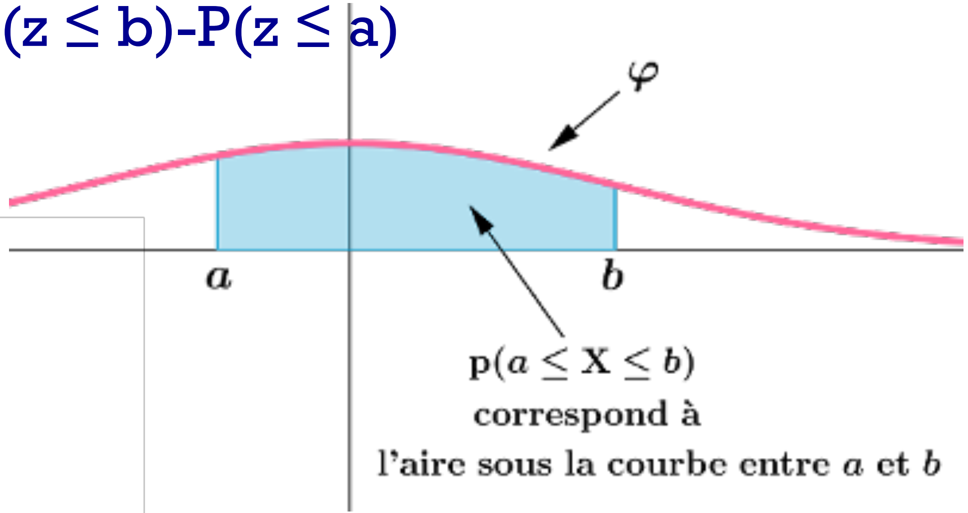


Propriété

- On peut calculer la probabilité comprise entre 2 valeurs a et b de Z

- Cette probabilité sera égale à l'aire comprise entre a et b

- Si b>a on a $P(a \leq z \leq b)=P(z \leq b)-P(z \leq a)$



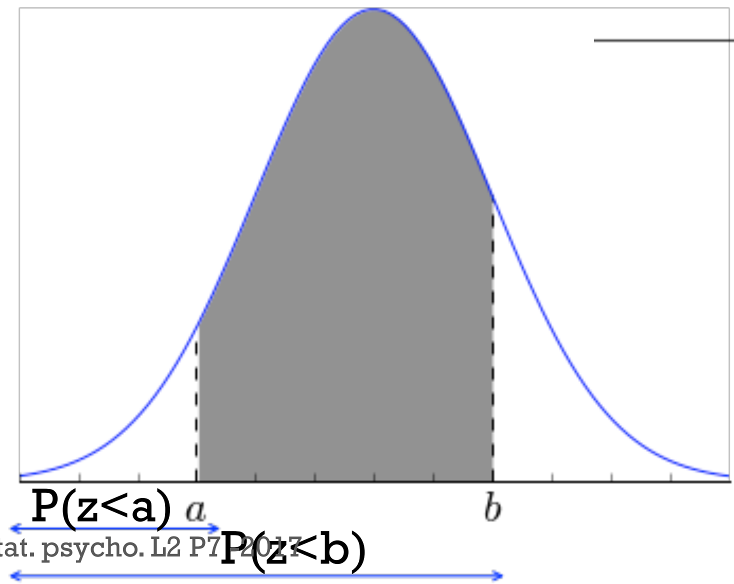


Table unilatéral

- Pour des raisons le plus souvent liées au contexte expérimental, on peut choisir d'effectuer des épreuves unilatérales dans lesquelles les valeurs extrêmes sont localisées d'un seul côté.

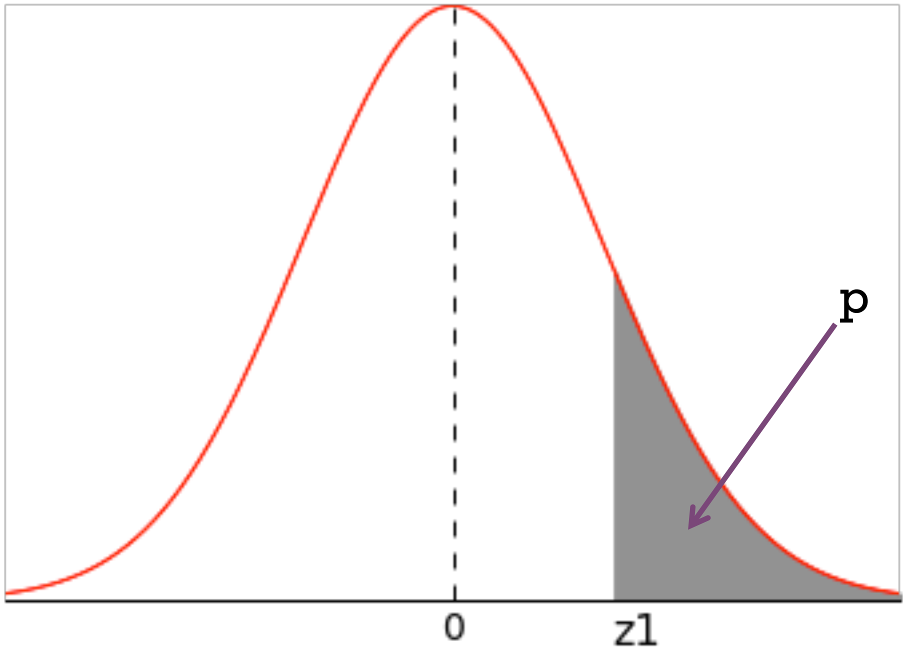
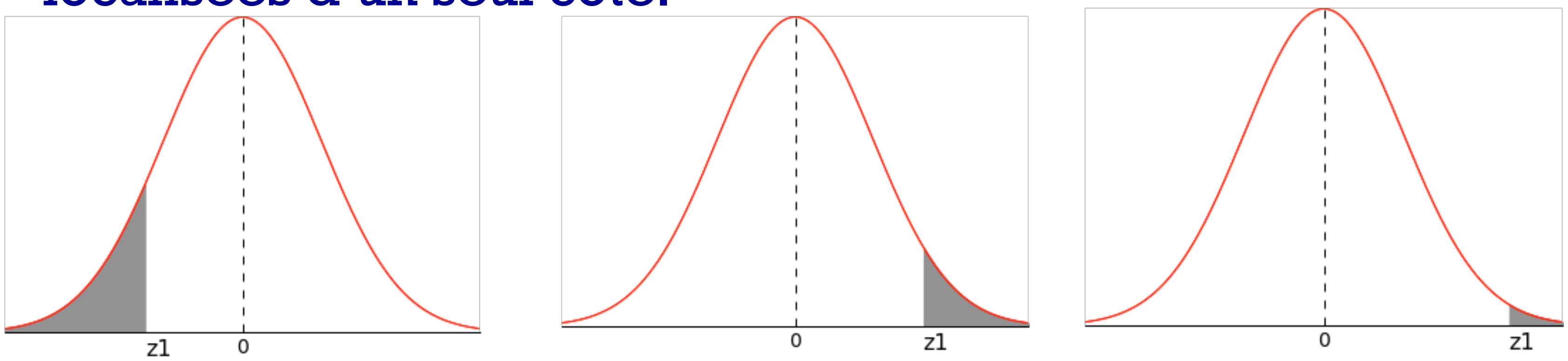


Table unilatéral

- Pour des raisons le plus souvent liées au contexte expérimental, on peut choisir d'effectuer des épreuves <u>unilatérales</u> dans lesquelles les valeurs extrêmes sont localisées d'un seul côté.



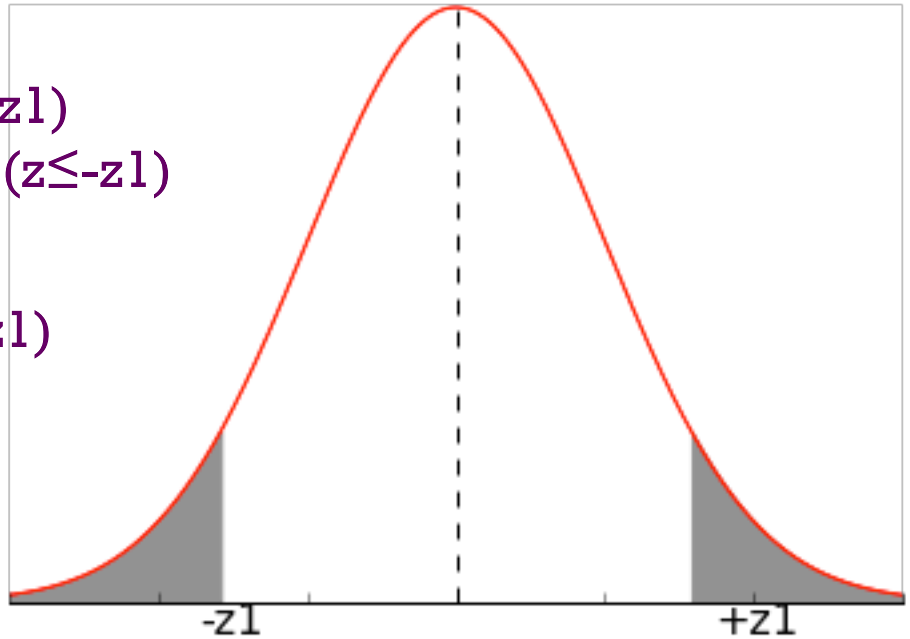
  - ✓ z_1=-1.23, zone grise =10%
  - ✓ z_1 = 1.65, zone grise =5%
  - ✓ z_1 = 2.33, zone grise =1%

- <u>Attention donc de quelle table on parle …</u>

Table bilatérale

- Le plus souvent, on utilise la table bilatérale externe, qui donne, pour une valeur de z considérée en valeur absolue, la proportion d'observations ayant une valeur de z, en valeur absolue, égale ou supérieure à z1

- Cette table donne pour un z déterminé une valeur telle que
  - $\alpha = P(z \leq -z1) + P(z \geq z1)$
  - Comme $P(z \leq -z1) = P(z \leq -z1)$
    On a $\alpha/2 = P(z \leq -z1) = P(z \leq -z1)$
  - $P(-z1 \leq z \leq z1) = 1 - \alpha$
  - $P(-z1 \leq z \leq 0) = P(0 \leq z \leq z1)$
    $= (1-\alpha)/2$



◆ Présentation de la table bilatérale

- ✓ Elle donne toutes les valeurs de |z| à 2 décimales comprises entre 0 et 4.
- ✓ Sur la colonne de gauche : les valeurs de |z| à une décimale
- ✓ Sur la 1ère ligne : on trouve la 2ème décimale correspondante.

Exemple : z=1,96

On repère la valeur 1,9 de la 1ère colonne
On repère la valeur 0,06 de la 1ère ligne
On trouve à l'intersection la valeur α correspondante : α=0.05

Cela signifie que : P(|z|>1.96)=0.05

ANNEXE 4 : loi normale réduite (probabilités bilatérales)

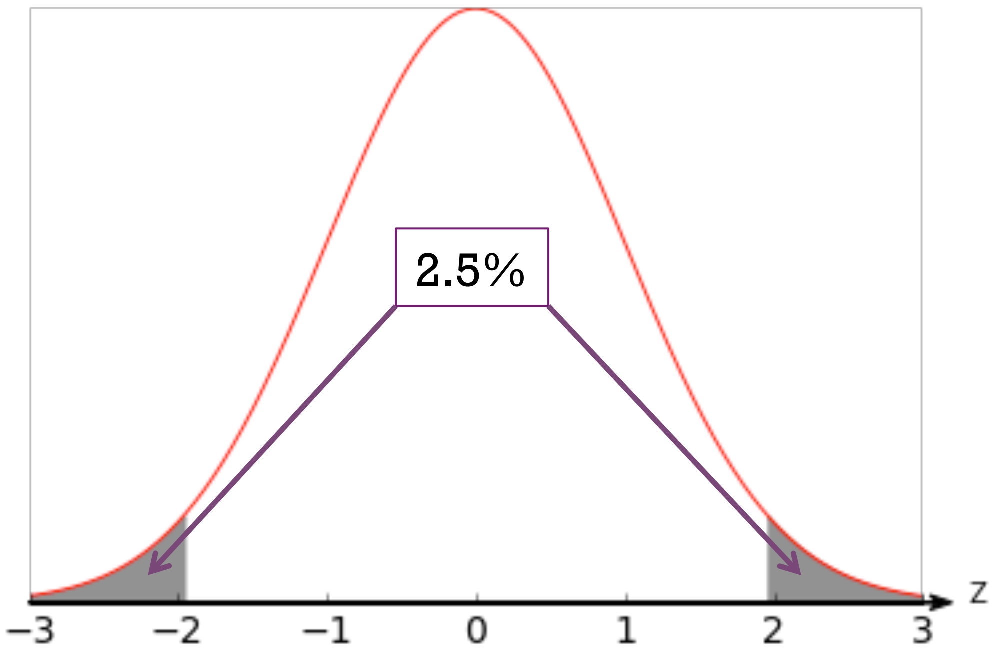
z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	1,00000	0,99202	0,98404	0,97607	0,96809	0,96012	[illegible]	0,94419	0,93624	0,92829
0,1	0,92034	0,91241	0,90448	0,99657	0,88866	0,88076	[illegible]	0,85501	0,85115	0,84031
0,2	0,84140	0,83367	0,82587	0,81809	0,81033	0,80259	[illegible]	0,78716	0,77948	0,77182
0,3	0,76418	0,75656	0,74897	0,74140	0,73386	0,72634	[illegible]	0,71138	0,70395	0,69654
0,4	0,68916	0,68181	0,67449	0,68720	0,65994	0,65271	[illegible]	0,63836	0,63123	0,62413
0,5	0,61708	0,61005	0,60306	0,59611	0,68920	0,58232	[illegible]	0,56868	0,56191	0,55519
0,6	0,54851	0,54185	0,53526	0,52889	0,52217	0,51559	[illegible]	0,50288	0,49650	0,49019
0,7	0,48393	0,47770	0,47152	0,46539	0,45930	0,45325	[illegible]	0,44130	0,43539	0,42953
0,8	0,42371	0,41794	0,41222	0,40654	0,40091	0,39532	[illegible]	0,38430	0,37886	0,37347
0,9	0,36812	0,36282	0,35757	0,35237	0,34722	0,34211	[illegible]	0,33205	0,32709	0,32217
1,0	0,31731	0,31250	0,30773	0,30301	0,29834	0,29372	[illegible]	0,28462	0,28014	0,27571
1,1	0,27133	0,26700	0,26271	0,25848	0,25420	0,25014	[illegible]	0,24200	0,23800	0,23405
1,2	0,23014	0,22628	0,22247	0,21870	0,21498	0,21130	[illegible]	0,20408	0,20055	0,19705
1,3	0,19360	0,19020	0,18684	0,18352	0,18025	0,17702	[illegible]	0,17069	0,16759	0,16453
1,4	0,16151	0,15854	0,15561	0,15272	0,14987	0,14706	[illegible]	0,14156	0,13887	0,13622
1,5	0,13361	0,13104	0,12851	0,12602	0,12356	0,12114	[illegible]	0,11642	0,11411	0,11183
1,6	[illegible]	[illegible]	0,10523	0,10310	0,10101	0,09894	[illegible]	0,09492	0,09296	0,09103
1,7	0,08913	0,08727	0,08543	0,08363	0,08156	0,08012	[illegible]	0,07673	0,07508	0,07345
1,8	0,07186	0,07030	0,06876	0,05725	0,06577	0,08431	[illegible]	0,06148	0,06011	0,05576
1,9	0,05743	0,08613	0,05486	0,05361	0,05238	[illegible]	0,05000	0,04884	0,04770	0,04859
2,0	0,04550	0,04443	0,04338	0,04236	0,04135	0,04036	[illegible]	0,03845	0,03753	0,66200
2,1	0,03573	0,03486	0,03401	0,03317	0,03235	0,03156	0,03077	0,03001	0,02928	0,02852
2,2	0,02781	0,02711	0,02842	0,02575	0,02509	0,02445	0,02382	0,02321	0,02261	0,02202
2,3	0,02145	0,02089	0,02034	0,01981	0,01928	0,01877	0,01827	0,01770	0,01731	0,01685
2,4	0,01640	0,01595	0,01552	0,01510	0,01469	0,01429	0,01389	0,01351	0,01314	0,01277
2,5	0,01242	0,01207	0,01174	0,01141	0,01109	0,01077	0,01047	0,01017	0,00988	0,00960
2,6	0,00932	0,00905	0,00879	0,00854	0,00829	0,00805	0,00781	0,00759	0,00736	0,00715
2,7	[illegible]	[illegible]	0,00653	0,00633	0,00614	0,00696	0,00578	0,00561	0,00544	0,00527
2,8	[illegible]	[illegible]	0,00480	0,00405	0,00451	0,00437	0,00424	0,00410	0,00398	0,00385
2,9	0,00373	0,00361	0,00350	0,06339	0,00328	0,00318	0,00308	0,00298	0,00288	0,00279
3,0	[illegible]	[illegible]	0,00253	0,00245	0,00231	0,00229	0,00121	0,00214	0,00207	0,00200
3,1	[illegible]	0,00187	0,00181	0,00175	0,00169	0,00183	0,00158	0,00152	0,00147	0,00142
3,2	[illegible]	0,00133	0,00128	0,00124	0,00120	0,00115	0,00111	0,00108	0,00104	0,00100
3,3	[illegible]	0,00093	0,00090	0,00087	0,00084	0,00081	0,00078	0,00075	0,00072	0,00070
3,4	0,00067	0,00066	0,00063	0,09060	0,00058	0,00056	0,00054	0,00052	0,00050	0,00048
3,5	0,00047	0,00045	0,00043	0,00042	0,00040	0,00039	0,00037	0,00036	0,00034	0,00033
3,8	0,00032	0,00931	0,06029	0,00028	0,00027	0,00026	0,00025	0,00924	0,00023	0,00022
3,7	0,00022	0,00021	0,03020	0,00019	0,00018	0,00018	0,00917	0,00016	0,00016	0,03015
3,8	0,00014	0,00014	0,00013	0,00012	0,00012	0,00011	0,00011	0,00011	0,00010	0,00090
3,9	0,00010	0,00009	0,00008	0,00008	0,00008	0,00007	0,00007	0,00007	0,00007	0,00007
4,0	0,00006	0,00006	0,00006	0,00005	0,00005	0,00005	0,00005	0,00005	0,00005	0,00004

Grandes valeurs du z

Seuil	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}	10^{-10}
z	4,265	4,734	5,199	5,611	5,998	6,355

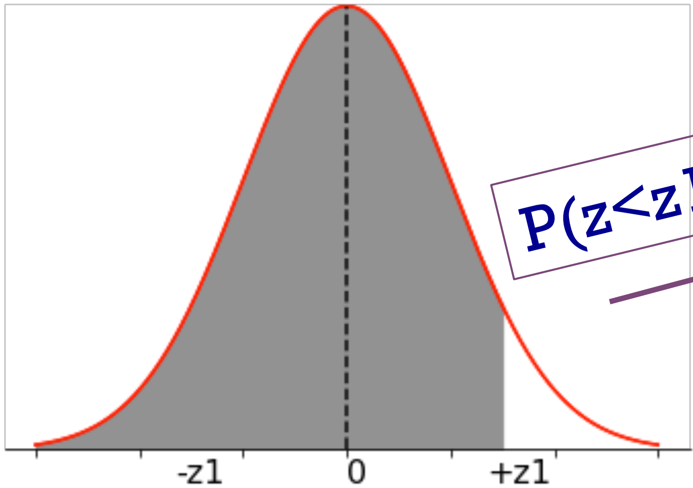
- Autrement dit, 5% des observations ont une valeur de Z soit supérieure à +1,96, soit inférieure à - 1,96

- Il y en a donc 2,5 % de chaque côté

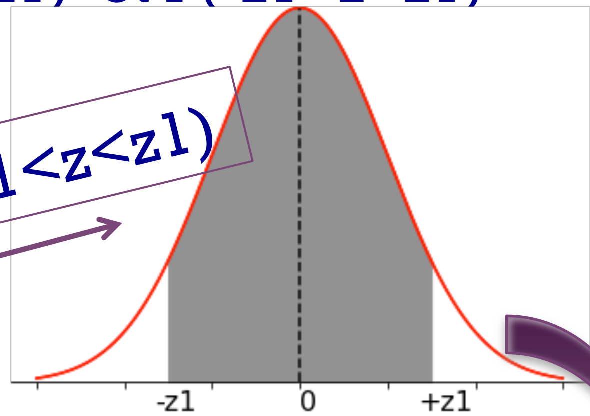


De la table unilatéral à bilatérale

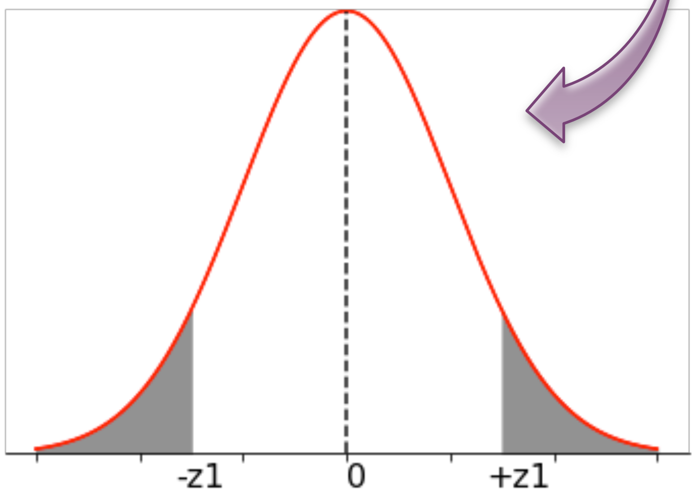
- On a $P(z<z1)$ et on veut: $P(z<-z1 \text{ et } z>z1)$ et $P(-z1<z<z1)$



$P(z<z1)-P(z<-z1)=P(-z1<z<z1)$



$P(z1<-z1 \text{ et } z>z1)=1-P(-z1<z<z1)$



- $P(z<-z1)=1-P(z<z1)$ d'où
  $P(-z1<z<z1)=P(z<z1)-1+P(z<z1)$
  $\underline{P(-z1<z<z1)=2xP(z<z1)-1}$

- $P(z1<-z1 \text{ et } z>z1)=2x(1-xP(z<z1))$

Exemple

- $P(z<1,96)=0.9744$

$P(-1,96<z<1,96)=2x0,9744-1=0,9488$

$P(z<1,96 \text{ et } z>1,96)=1-0,9488=0,0512$

Exemple I a. – Table unilatérale

- Le temps nécessaire aux étudiants pour terminer une épreuve d'examen est une variable normale, de moyenne 90 min et d'écart-type 15 min. Quelle durée doit-on fixer à l'épreuve si l'on souhaite que 90% des étudiants puissent terminer dans le temps imparti ?

- Solution a: avec le tableau z unilatéral (plus simple)
  On cherche donc z1 tel que $P(z<z1)=0.90$.
  Avec le tableau z unilatéral la plus proche probabilité est de : 0,9015.
  Pour laquelle on lit z1=1,29.
  $z1=(x-90)/15=1,29 \Rightarrow x=109.35$ soit environ 1h50

Exemple I b. – Table unilatérale

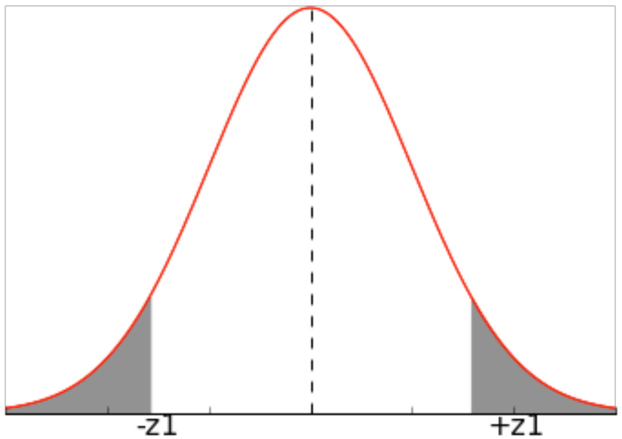
- L' échelle de dépression du test M.M.P.I* est standardisée sur une moyenne de 50 et un écart-type de 10 (**Minnesota multiphasic personality inventory*: permet une exploration des différents aspects de la personnalité normale et pathologique)

- Si l'on considère qu'une note standard supérieure ou égale à 70 traduit un état pathologique, combien trouve t-on de personnes pathologiquement dépressives dans une population de 30 000 personnes ?
  z=(70-50)/10 = 2 , P(z1<2) = 0,9772
  => P(z1>1)= 1-P(z1<2)=0,0228 soit 0,0228 x 30000= 684 sont pathologiquement dépressive parmis les 30 000 personnes.

Exemple II

- L' échelle de dépression du test M.M.P.I* est standardisée sur une moyenne de 50 et un écart-type de 10 (**Minnesota multiphasic personality inventory*: permet une exploration des différents aspects de la personnalité normale et pathologique)

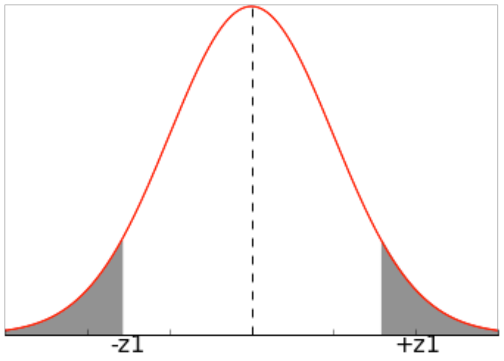
- Si l'on considère qu'une note standard supérieure ou égale à 70 traduit un état pathologique, combien trouve t-on de personnes pathologiquement dépressives dans une population de 30 000 personnes ?
  On donne $\alpha = P(z \leq -2) + P(z \geq 2) = 0.046$



Exemple II – Table bilatérale

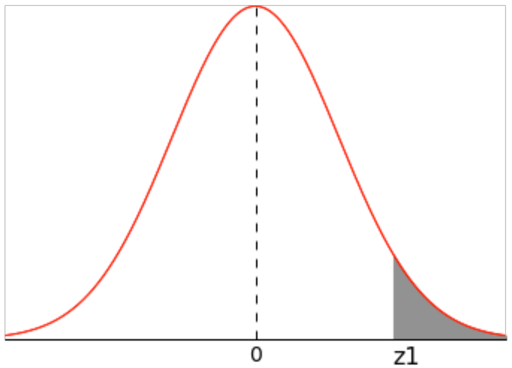
- Le temps nécessaire aux étudiants pour terminer une épreuve d'examen est une variable normale, de moyenne 90 min et d'écart-type 15 min. Quelle durée doit-on fixer à l'épreuve si l'on souhaite que 90% des étudiants puissent terminer dans le temps imparti ?

- Solution b: avec le tableau z bilatéral (plus simple)
On a $P(z<-z1)+P(z>z1)$ et on veut $P(z<z1)$
$P(z<z1) = 1 - P(z>z1)$ comme $P(z>z1)=P(z<-z1)$
$P(z<z1) = 1 - (P(z<-z1)+P(z>z1))/2$
d'où $P(z<-z1)+P(z>z1) = (1-P(z<z1))x2 = 0{,}2$
Avec le tableau la probabilité la plus proche est de $P(z1)=0{,}201$ soit $z= 1{,}28$



Exemple II – Table bilatérale

- $Z=(X-\mu)/\sigma = (70-50)/10 = 2$
- On cherche la probabilité $P(Z \geq 2)$

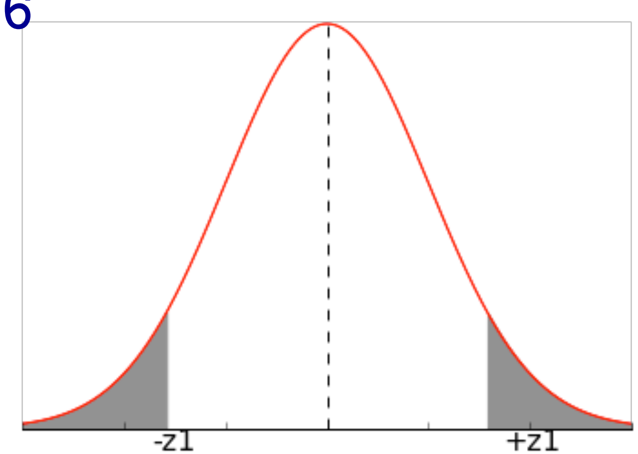


- $P(Z \leq -2) + P(Z \geq 2) = 0.046$ (1)
  - ✓ On sait que $P(Z \leq -2) = P(Z \geq 2)$ (2)
  - ✓ Avec (2) et (1), $2 \times P(Z \geq 2) = 0.046 \Rightarrow P(Z \geq 2) = 0.023 = 2.3\%$

Exemple II – Table bilatérale

- L' échelle de dépression du test M.M.P.I* est standardisée sur une moyenne de 50 et un écart-type de 10 (**Minnesota multiphasic personality inventory*: permet une exploration des différents aspects de la personnalité normale et pathologique)

- Si l'on considère qu'une note standard supérieure ou égale à 70 traduit un état pathologique, combien trouve t-on de personnes pathologiquement dépressives dans une population de 30 000 personnes ?
  On donne $\alpha = P(z \leq -z1) + P(z \geq z1) = 0.046$
  $P(0 \leq z < z1) + P(z \geq z1) = 0,5$ on sait que
  $P(0 \leq z \leq z1) = (1-\alpha)/2$ d'où:
  $P(z \geq z1) = 0.5 - (1-\alpha)/2 = 0.023$
  2.3%x30 000 = 690 personnes



Exemple II – Table bilatérale

- Les scores de QI au test de Wechsler suivent une loi normale de moyenne 100 et d'écart-type 15 points.
  - ✓ Quelle est la probabilité de l'événement : « score compris entre 85 et 115 » ?

On cherche $z \in [(85-100/15); (115-100/15)]$ soit $z \in [-1;1]$
La table nous donne $P(z<-z1 \text{ et } z>z1)$, pour avoir $P(-1<z<1)$ il faut faire $1- P(z<-z1 \text{ et } z>z1)$ soit $1- 0,317=68,3\%$.
On retrouve bien les 68% dans $\pm 1\sigma$, on peut verifier pour $\pm 2\sigma$ et $\pm 3\sigma$

  - ✓ Estimer le score moyen de 99% de la population
    $P(-z1<z<z1)=0,99$, on cherche dans la table
    $P(z<-z1 \text{ et } z>z1)=1-P(-z1<z<z1)=0.01$ soit
    $z1=2,56$ donc le score est $z1=(x1-100)/15=138,4$
    et $z1=-(x1-100)/15=61,6$
    score $\in [61,6;138,4]$